Poursuites

A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there.

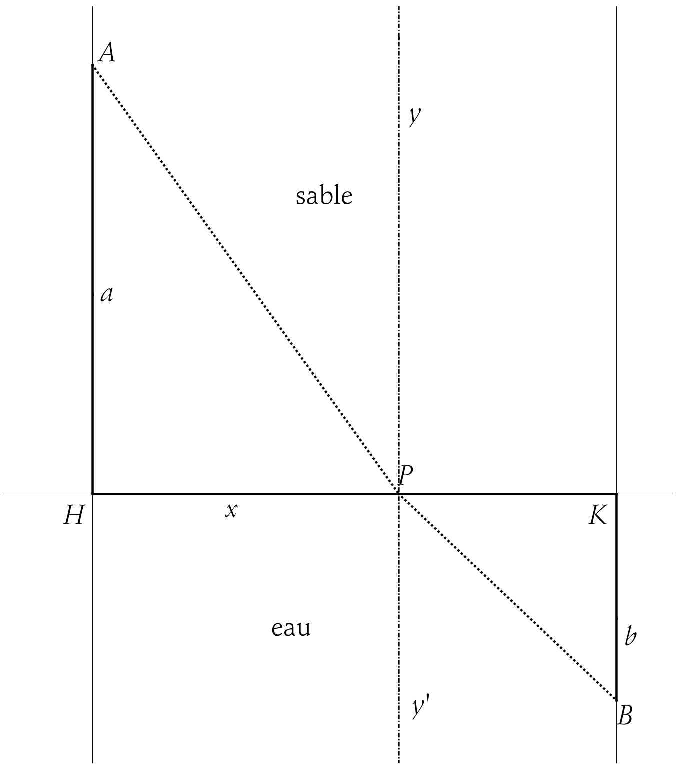
Charles R Darwin

Lorsque Lucie s'engagea avec sa planche de surf au creux des immenses vagues qui balayaient le rivage elle sentit rapidement qu'elle perdait pied… Instantanément entrainée au large par les redoutables courants elle commença à crier pour attirer l'attention des sauveteurs qui surveillaient la plage de Waikiki. Maxime, toujours prêt à venir au secours d'une belle jeune fille, prit immédiatement son scooter autonome sous le bras et se précipita vers le bord de la plage.

Il avait quand même une certaine distance à parcourir sur le sable et Lucie avait été vite entraînée vers le large ; il lui fallait calculer le meilleur endroit où se jeter à l'eau afin d'arriver au plus vite près de Lucie. On avait greffé récemment à son cerveau un petit calculateur électronique qui lui permettait de faire des calculs complexes sans difficulté, aussi prépara-t-il le schéma de calcul dans la partie normale de son cerveau ; ce dernier transmit au calculateur les équations à résoudre et en moins de deux centièmes de seconde le point idéal apparut devant ses yeux.

Partie I

1. On a représenté sur le schéma ci-dessous la trajectoire de Maxime (qui part de A, se jette à l'eau en P et rejoint Lucie en B ; on connaît $AH = a$, $KB = b$ et $HK = l$).



Montrer que le trajet total est donné par $d = f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$ et que le temps total que mettra Maxime pour rejoindre Lucie est $t = g(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(l-x)^2 + b^2}$ où v_1 est sa vitesse de course sur le sable et v_2 sa vitesse sur l'eau.

2. En utilisant Chamois et en représentant v_1 et v_2 par deux segments dont on utilisera la mesure des longueurs, déterminer par simple déplacement de P la position du point P où le trajet d est minimal puis celui où la durée du trajet t est minimale.

3. Calculer la dérivée $g'(x)$ de $t = g(x)$. A l'aide d'Excel tracer la courbe de g' et vérifiez qu'elle s'annule pour une seule valeur de x (on prendra pour le tracé $a = 5$, $b = 2$, $l = 10$, $v_1 = 2$ et $v_1 = 1$).

4. On veut vérifier que g' s'annule bien une seule fois : calculez $g''(x)$ et vérifiez que cette dernière est toujours positive. Déduisez-en que g' s'annule pour une unique valeur x_0. Donnez une valeur approchée de x_0 correspondant au tracé du 3. Combien vaut alors t ?

5. On note α l'angle entre (AP) et la verticale au point P, soit l'angle $\widehat{APy}$ et β l'angle $\widehat{BPy'}$. Montrez que $g'(x) = 0$ lorsque $\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}$. Quelle loi physique bien connue retrouvez-vous ? Que vaut alors t (on notera cette valeur $t_{\min}$) ? Vérifiez votre calcul sur l'exemple du 3.

6. Lucie qui a réussi à monter sur sa planche de surf commence à s'ennuyer ferme, aussi pour s'occuper l'esprit se demande-t-elle si on pourrait trouver x en fonction de t à partir de $t = g(x)$, soit trouver une fonction h telle que $x = h(t)$.

a. Si c'est le cas montrez que l'on a $g(h(t)) = t$ et $h(g(x)) = x$. En utilisant la dérivée des fonctions composées montrez que $h'(t) = \frac{1}{g'(h(t))}$.

b. Que se passe-t-il dans cette formule lorsque $t = t_{\min}$? A quoi est-ce dû ? Donnez une interprétation géométrique.

7. Maxime qui est donc un calculateur prodige grâce à son cerveau bionique aimerait connaître sa vitesse moyenne entre le moment où il est parti et le moment où il sauve Lucie. Il décide de prendre la moyenne des deux vitesses v_1 et v_2 mais trouve un résultat bizarre. Pourquoi et pouvez-vous l'aider ?

Partie II

En fait pendant que Maxime court sur la plage puis va vers Lucie sur son scooter cette dernière continue à être emportée vers le large par le courant en décrivant une droite perpendiculaire au rivage. Lorsqu'il est prêt à se jeter à l'eau Maxime s'aperçoit que Lucie n'est plus du tout à l'endroit prévu, il doit donc modifier sa stratégie.

Notons $P = M_0$ la position initiale de Maxime et L_0 celle de Lucie ; la courbe de Lucie est $L(x_L(t), y_L(t))$; la position initiale de Maxime est $M_0(x_0, y_0)$; le rapport des vitesses de Maxime et de Lucie est

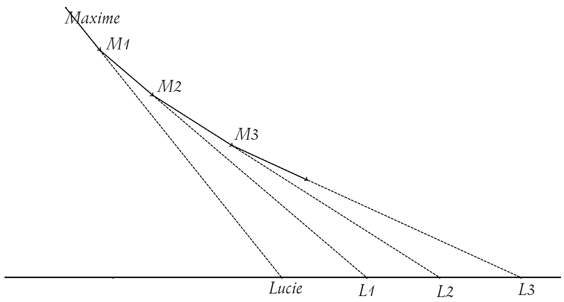
$$R = \frac{\textit{vitesse}\ \text{Maxime}}{\textit{vitesse}\ \text{Lucie}}.$$

Quand Lucie fait un petit déplacement, que nous appellerons un « pas », Maxime en fait un dans la direction de Lucie. A chaque pas Maxime ajuste sa direction pour toujours viser Lucie. Si on note

$$\delta x_L = x_L(t+dt) - x_L(t)$$

$$\text{et } \delta y_L = y_L(t+dt) - y_L(t)$$

où dt est le temps écoulé entre deux pas de Lucie, alors :



la distance ML est

$$\sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}\ ,$$

- le vecteur $\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} x_L - x_M \\ y_L - y_M \end{pmatrix}$,
- pendant le temps dt Lucie parcourt la distance $m = \sqrt{\delta {x_L}^2 + \delta {y_L}^2}$,
- Maxime parcourt donc la distance mR dans la direction d'un vecteur normé (de norme 1) colinéaire à $\overrightarrow{ML}$ d'où les formules :

$$\begin{cases} \delta x_M = (x_L - x_M)\dfrac{R.\sqrt{\delta {x_L}^2 + \delta {y_L}^2}}{\sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}} \\ \delta y_M = (y_L - y_M)\dfrac{R.\sqrt{\delta {x_L}^2 + \delta {y_L}^2}}{\sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}} \end{cases}.$$

Normalement Maxime ne peut pas changer de direction instantanément, il procède en quelque sorte par bonds successifs ; dans ce cas on a une suite récurrente en remplaçant δx_M et δy_M par $x_{n+1} - x_n$ et $y_{n+1} - y_n$ ainsi que x_M et y_M par x_n et y_n. Mais en fait on peut sans trop de risques considérer que Maxime fait ses changements de direction instantanément d'où des équations différentielles (difficiles, voire impossibles à résoudre dans la plupart des cas) ce qui amènera à résoudre par la méthode que l'on veut mais en tout cas à considérer un dt de la taille qu'on veut ce qui ramènera à la situation de résolution avec des suites.

Divisons donc tout par dt : $\dfrac{\delta x_M}{dt} = x'_M$, $\dfrac{\delta y_M}{dt} = y'_M$ sont les dérivées du mouvement de Maxime, $\dfrac{\delta x_L}{dt} = x'_L$, $\dfrac{\delta y_L}{dt} = y'_L$ celles du mouvement de Lucie, d'où les équations différentielles :

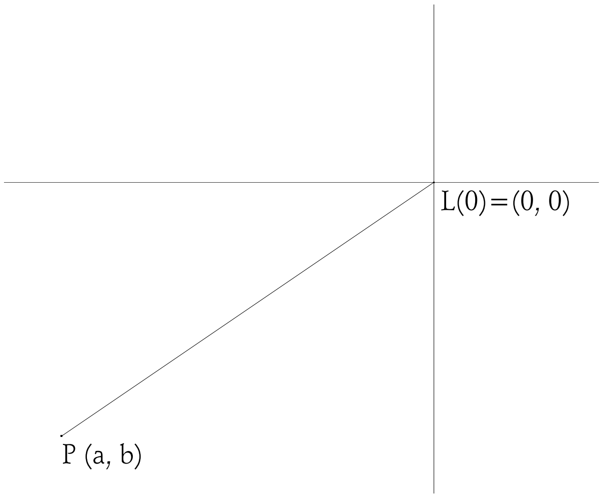
$$\begin{cases} x'_M = (x_L - x_M)\dfrac{R.\sqrt{{x'_L}^2 + {y'_L}^2}}{\sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}} \\ y'_M = (y_L - y_M)\dfrac{R.\sqrt{{x'_L}^2 + {y'_L}^2}}{\sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}} \end{cases}$$

Pour utiliser la méthode d'Euler on fait alors :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(X_n - x_n)\dfrac{R.\sqrt{[(X_{n+1} - X_n)^2 + (Y_{n+1} - Y_n)^2]}}{h\sqrt{(X_n - x_n)^2 + (Y_n - y_n)^2}} \\ y_{n+1} = y_n + h(Y_n - y_n)\dfrac{R.\sqrt{[(X_{n+1} - X_n)^2 + (Y_{n+1} - Y_n)^2]}}{h\sqrt{(X_n - x_n)^2 + (Y_n - y_n)^2}} \end{cases}$$

où les X et Y représentent les positions de Lucie aux instants n et $n + 1$.

Dans le cas qui nous intéresse un certain nombre de simplifications vont apparaître : Lucie se déplace sur une droite et la vitesse du courant est constante. On peut alors choisir un repère où l'équation de la trajectoire de Lucie est $x_L(t) = 0$ et sa position initiale est $L_0(0\,;0)$; sa vitesse est constante et vaut $\sqrt{x'_L{}^2+y'_L{}^2}=c$; on a alors $\begin{cases} x'_M=-x_M\dfrac{Rc}{\sqrt{x_M{}^2+(y_L-y_M)^2}} \\ y'_M=(y_L-y_M)\dfrac{Rc}{\sqrt{x_M{}^2+(y_L-y_M)^2}} \end{cases}$ avec $y_L=ct$.



1. En utilisant la méthode d'Euler représenter avec Excel la trajectoire de Maxime. Déterminez alors le temps mis par ce dernier pour rejoindre Lucie ainsi que les coordonnées du point de rencontre.

2. Quelle est la distance totale parcourue par Maxime depuis son entrée dans l'eau ?

On prendra $R = 3$, $c = 15$, $x_0=a=-1$, $y_0=b=-2$ (tout est en km et en heures).

3. On remarque que dans les deux équations précédentes, si on divise la deuxième ligne par la première on a (on note dorénavant $y_M = y$ et $x_M = x$)

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y_L-y}{-x}\Leftrightarrow yx'-xy'=y_L=ct.$$

Dérivons cette relation par rapport à t : $\dfrac{d(yx'-xy')}{dt}=c$ (**1**).

Par ailleurs nous savons que la vitesse de Maxime est R fois celle de Lucie (c), ce qui se traduit par :

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=Rc\Leftrightarrow\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}=Rc\Leftrightarrow\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt}=Rc\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=Rc\ (\mathbf{2}).$$

Maintenant nous divisons allègrement (**1**) par (**2**) ce qui a pour effet de faire disparaître les dt ainsi que c :

$$\frac{d(yx'-xy')}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=R\Leftrightarrow\frac{d(yx'-xy')}{dx}=R\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

En fait pour l'instant y et x sont des fonctions de t, mais on peut essayer de trouver y en fonction de x, ce qui donnera des solutions de la forme $y = f(x)$. S'il en est ainsi x devient la variable et dans l'écriture précédente on a $x' = 1$.

On dérive donc $y-xy'$ par rapport à x, ce qui donne $(y-xy')'=y'-(1y'+xy'')=-xy''$; notre équation devient alors

$$-xy'' = R\sqrt{1+y'^2} \quad (\mathbf{3}).$$

Nous allons résoudre cette équation.

a. On considère la fonction $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que sinh est bijective et qu'elle admet une fonction réciproque $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Calculer la dérivée de $\sinh^{-1}(x)$ puis en utilisant la dérivée des fonctions composées montrer que $\left(\sinh^{-1}(u)\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$.

b. Montrer que l'équation (**3**) donne après intégration $\sinh^{-1} y' = -R\ln x + K$ puis que

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{e^K}{x^R} - \frac{x^R}{e^K}\right)$$

où K est une constante.

Avec la condition initiale que Maxime se jette à l'eau sans vitesse initiale montrer que

$$y' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^R - \left(\frac{x}{a}\right)^R\right].$$

c. Montrer qu'une primitive de x^m où ***m* est réel** et différent de -1 est $\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}$.

En déduire que si R est différent de 1 on a

$$y = \frac{a^R}{2(1-R)}x^{1-R} - \frac{a^{-R}}{2(1+R)}x^{R-1} + K'.$$

Déterminer la valeur de K' pour que $y(a) = b$.

d. Tracez la solution obtenue avec les valeurs du 2. et comparez avec ce qu'a donné la méthode d'Euler.

e. Pour les courageux : que se passe-t-il lorsque $R = 1$ ¿

Ce type de courbes appelées courbes de poursuite semblent avoir été relativement peu étudiées ; on en a la première trace dans les carnets de Léonard de Vinci ; par la suite on trouve les noms de Pierre Bouguer en 1732 et de Du Boisaymé (¿) en 1811. On ne connaît la solution lorsque la trajectoire du poursuivi est un cercle que depuis 1921 (qui ¿) ; dans mes nombreuses lectures je n'ai jamais rien vu sur la question mis à part la mise initiale en équations. Ici nous ne traitons le problème que dans le plan, il faudrait évidemment pouvoir travailler dans l'espace (temps ¿).

Quelques trucs sur

http://www.mathcurve.com/courbes2d/poursuite/poursuite.shtml

ainsi que

http://mathworld.wolfram.com/PursuitCurve.html http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Pursuit.html

Par ailleurs certaines solutions sont celles que l'on obtient pour le mouvement des planètes :

http://www.mathcurve.com/courbes2d/nageur/nageur.shtml

Ceci amène à se poser la question suivante : dans la mesure où le Soleil se déplace dans l'espace, ne pourrait-on envisager la trajectoire des objets célestes comme des trajectoires de poursuite ? Les planètes ou autres objets étant soumis à l'attraction du Soleil chercheraient en permanence à rattraper ce dernier ; les paramètres en jeu (position et vitesse initiale du poursuivant, trajectoire du poursuivi) dans l'équation précédente ne donnant que quelques solutions « stables » (de notre point de vue bien sûr) on pourrait peut-être trouver là une réponse à certaines questions : d'où proviennent les distances des planètes au Soleil, pour quelle raison ont-elles ces vitesses, etc. On doit pouvoir également faire le lien avec la loi de gravitation de Newton (dans le sens où la loi de Newton a obligatoirement la forme en $1/r^2$ pour que les trajectoires soient stables).