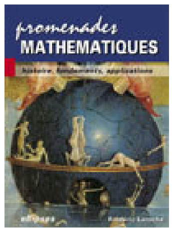
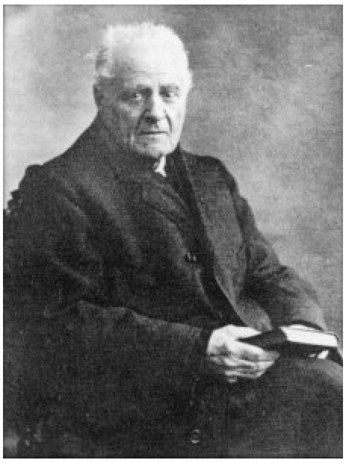



accueil

# *Vibrations des poutres*



Joseph Boussinesq (1842 - 1929) fut un des grands contributeurs à la théorie de l'élasticité ainsi qu'à l'hydrodynamique. La plupart des résultats de ce texte lui sont dus. Curieusement peu de textes lui sont consacrés sur internet : pour une biographie succinte voir sur le site de l'Ambassade de France au Canada !!! Quelques archives sont disponibles dans les annales de Normale Sup.

Ce texte est la suite de poutres.

**Sommaire**



## *1. Equation du mouvement*

On considère toujours une poutre horizontale homogène en équilibre dont la direction est l'axe des $x$. La déformation verticale à chaque point $x$ et à chaque instant $t$ est due au poids et à la charge de la poutre, $P(x, t)$ de sorte que $P(x,t) = EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ où $E$ est le module d'élasticité de Young et $I$ le moment d'inertie de la section de poutre au point considéré. Dans la première partie nous n'avons regardé que des cas statiques où $t$ n'est pas pris en compte ; pour faire intervenir le mouvement on utilise le principe de d'Alembert assurant que tout problème dynamique peut être rapporté à un problème statique par l'utilisation de forces d'inertie appropriées. Dans notre cas les forces d'inertie seront de la forme $-\rho S\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ où $\rho$ est la densité de la poutre et $S$ la surface de la section de poutre à l'abscisse $x$. L'équation du mouvement est alors

$$P(x,t) - \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Posons alors $a^2 = \frac{EI}{\rho S}$, l'équation précédente devient

(**1**) $$\frac{P(x,t)}{EI} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Enfin rappelons l'équation générale (E) de la première partie qui donne le moment de flexion

(**2**) $$M(x) = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

## *2. Vibrations libres d'une poutre de longueur infinie*

Considérons que le mouvement est produit par une flexion de la poutre et que chaque point est animé d'une vitesse transversale connue : on a à $t = 0$ $y = f(x)$ qui donne la forme de la poutre et $\frac{\partial y}{\partial t} = a\frac{d^2 g}{dx^2}$ où $g$ est également connue.

Puisque les vibrations sont libres (aucunes forces n'opèrent sur la poutre autres que les conditions initiales) on a $P(x, t) = 0$ ; l'équation (**1**) est alors $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ que nous multiplions par $e^{iux}$ et intégrons de $-\infty$ à $+\infty$ (on cherche la transformée de Fourier (TF) de (**1**)).

(**3**) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}e^{iux}dx + \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{iux}dx = 0.$$

Posons $Y(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y(x, t)e^{iux}dx$ ; comme $\frac{\partial Y(u, t)}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial y(x, t)e^{iux}}{\partial x}dx = uY(u, t)$ d'après les propriétés de la TF on obtient alors par dérivations successives

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial y^4(x, t)}{\partial x^4}e^{iux}dx = u^4 Y(u, t).$$

(**3**) devient donc

(**4**) $$u^4 Y + \frac{1}{a^2}\frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 Y}{dt^2} + a^2 u^4 Y = 0.$$

Les conditions initiales donnent $Y = F(u)$ où $F$ est la TF de $f$ et $\frac{dY}{dt} = -au^2 G(u)$ où $G$ est la TF de $g$.

$Y$ est donc solution d'une équation classique et prend la forme $Y(u, t) = A\cos(au^2 t) + B\sin(au^2 t)$ ; à $t = 0$, $Y(u, 0) = F(u) \Rightarrow A = F(u)$ et $\frac{dY(u, t)}{dt} = -Aau^2\sin(au^2 t) + Bau^2\cos(au^2 t) \Rightarrow Bau^2 = -au^2 G(u) \Rightarrow B = -G(u)$.

Finalement

$$Y(u, t) = F(u)\cos(au^2 t) - G(u)\sin(au^2 t).$$

Il nous « reste » à retourner à $y$ avec la TF inverse :

(**5**) $$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(u, t)e^{-iux}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\cos(au^2 t)e^{-iux}du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\sin(au^2 t)e^{-iux}du.$$

Il nous reste en fait à trouver les TF de $\cos(au^2 t)$ et $\sin(au^2 t)$ ce qui permettra par simple convolution de réintroduire $f$ et $g$ : on rappelle que si deux fonctions $p$ et $q$ ont pour TF $P$ et $Q$ alors la TF de $PQ$ est $p * q$ :

$$p*q(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)q(y-x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)e^{-it(y-x)}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)e^{-ity}dt\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)e^{itx}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)e^{-ity}dt\left(\sqrt{2\pi}P(t)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)P(t)e^{-ity}dt.$$

La calcul de ces deux TF fait penser à celui bien connu de $e^{-x^2}$ : on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha u^2}e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}},$$

soit en posant $\alpha=i\beta$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\beta u^2}e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2i\beta}}e^{-\frac{x^2}{4i\beta}}=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{x^2}{4\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{x^2}{4\beta}}=\frac{1}{2\sqrt{\beta}}(1-i)e^{i\frac{x^2}{4\beta}}.$$

On a alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(\beta u^2)-i\sin(\beta u^2)]e^{-iux}du=\frac{1}{2\sqrt{\beta}}(1-i)e^{i\frac{x^2}{4\beta}}=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{i\left(\frac{x^2}{4\beta}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\beta u^2)e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\cos\left(\frac{x^2}{4\beta}-\frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\beta u^2)e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4\beta}\right).$$

Appliquons le théorème de convolution :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\cos(au^2t)e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2at}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-h)\cos\left(\frac{h^2}{4at}-\frac{\pi}{4}\right)dh$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G(u)\sin(au^2t)e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2at}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-h)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{h^2}{4at}\right)dh$$

d'où

(**6**) $$y(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-h)\cos\left(\frac{h^2}{4at}-\frac{\pi}{4}\right)dh+\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-h)\sin\left(\frac{h^2}{4at}-\frac{\pi}{4}\right)dh\right].$$

(Attention, les deux intégrales ne peuvent pas se simplifier ensemble, la variable d'intégration étant muette dans les deux cas, mais le lecteur l'aura bien sûr compris).

A titre d'exemple considérons une poutre de forme gaussienne et de vitesse initiale nulle et reprenons à la solution (**5**) : on prend donc

$$f(x)=\varepsilon e^{-\frac{x^2}{4r^2}},\ g(x)=0,$$

de TF respectives

$$F(u)=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4r^2}+iux}dx=\sqrt{2}\varepsilon re^{-u^2r^2}\ \text{ et }\ G(u)=0.$$

On a alors

$$y(x,t)=\frac{\varepsilon r}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2r^2}\cos\left(atu^2\right)e^{-iux}du=\frac{\varepsilon r}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2r^2+iatu^2-iux}+e^{-u^2r^2-iatu^2-iux}du$$

$$=\frac{\varepsilon r}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2(r^2-iat)-iux}+e^{-u^2(r^2+iat)-iux}du=\frac{\varepsilon r}{2}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4(r^2-iat)}}}{\sqrt{r^2-iat}}+\frac{e^{-\frac{x^2}{4(r^2+iat)}}}{\sqrt{r^2+iat}}\right]$$

et en posant $R\,e^{i\theta}=r^2+iat,\, R\,e^{-i\theta}=r^2-iat$ :

$$y(x,t)=\frac{\varepsilon r}{2\sqrt{R}}\left[e^{-\frac{x^2}{4R}e^{i\theta}}e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-\frac{x^2}{4R}e^{-i\theta}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]=\frac{\varepsilon r}{\sqrt{R}}e^{-\frac{x^2}{4R}\cos\theta}\cos\left(\frac{x^2}{4R}\sin\theta-\frac{1}{2}\theta\right).$$

Mais on a $R\cos\theta=r^2$ et $R\sin\theta=at$ d'où $R^2=r^4+a^2t^2$ et $\theta=\arctan\left(\frac{at}{r^2}\right)$ d'où en remplaçant :

$$y(x,t)=\frac{\varepsilon r}{\left(r^4+a^2t^2\right)^{1/4}}e^{-\frac{x^2r^2}{4\left(r^4+a^2t^2\right)}}\cos\left(\frac{atx^2}{4\left(r^4+a^2t^2\right)}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{at}{r^2}\right)\right).$$

Si on utilise (**6**) on a

$$y(x,t)=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-h)^2}{4r^2}}\cos\left(\frac{h^2}{4at}-\frac{\pi}{4}\right)dh$$

qui doit donner la même chose évidemment (bon courage aux amateurs…).

Ce résultat peut par exemple modéliser le comportement d'un pont de grande longueur soumis à des mouvements verticaux aléatoires d'amplitude moyenne $\varepsilon$ et d'écart-type $2r$.

## *3. Vibrations d'une poutre semi-infinie sous contrainte*

On considère maintenant une poutre dont une « extrémité » (à l'infini) est libre mais dont la base ($x = 0$) est animée d'un mouvement déterminé. Les conditions initiales sont alors :

$$y=f(t),\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \text{ à } x=0,\, t>0$$

et si la poutre est à l'équilibre à l'origine des temps :

$$y=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0 \text{ à } t=0,\ x\geq 0\,.$$

Les forces représentées par $P$ restent nulles et l'équation de la TF du mouvement est toujours l'équation (**3**) avec quelques modifications : la borne inférieure devient 0, par ailleurs comme pour la TF $F$ d'une fonction $f$ on a $F^{(n)}(u)=(-iu)^r F(u)$ à condition que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{d^s f}{dx^s}\right)=0,\, s=0,1,\ldots,r-1$, ce qui est le cas ici. On a donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}e^{iux}dx=-iu\int_0^{+\infty}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}e^{iux}dx=(-iu)^2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{iux}dx=-u^2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{iux}dx$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}e^{iux}dx+\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{iux}dx=0\Leftrightarrow u^2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{iux}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}e^{iux}dx\,,$$

soit en ne gardant que la partie imaginaire :

(**7**) $$u^2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sin(ux)dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\sin(ux)dx\,.$$

Intégrons par parties la première intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sin(ux)dx=\left[\frac{\partial y}{\partial x}\sin(ux)-uy\cos(ux)\right]_0^{+\infty}-u^2\int_0^{+\infty}y\sin(ux)dx=uf(t)-u^2\int_0^{+\infty}y\sin(ux)dx$$

grâce à la première condition. L'équation (7) devient donc

$$u^2\left(uf(t)-u^2\int_0^{+\infty}y\sin(ux)dx\right)=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\sin(ux)dx \text{ soit en posant } Y(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}y\sin(ux)dx\,,$$

$$u^3 f(t)-u^4\sqrt{\frac{\pi}{2}}Y(u)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 Y(u)}{\partial t^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+a^2u^4Y(u)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}u^3 f(t)\,.$$

Les conditions initiales nous donnent $Y(0)=\frac{dY}{dt}(0)=0$.

Le problème plus général rencontré ici est de résoudre sous les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$ l'équation $\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=f(t)$ : en utilisant la transformée de Laplace on obtient la solution générale

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(u)\sin\omega(t-u)du\,.$$

On a donc dans notre cas la solution

$$Y(u,t)=\frac{1}{au^2}\int_0^t\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2u^3 f(z)\sin au^2\left(t-z\right)dz=au\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t f(z)\sin\left(au^2t-au^2z\right)dz\,.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'inversion de la transformée-sinus, soit

$$y(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}Y(u,t)\sin(ux)du=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}u\left[\int_0^t f(z)\sin(au^2t-au^2z)dz\right]\sin(ux)du$$

d'où en inversant l'ordre d'intégration :

(**8**)
$$y(x,t)=\frac{2a}{\pi}\int_0^t f(z)dz\int_0^{+\infty}u\sin(au^2t-au^2z)\sin(ux)du\,.$$

La deuxième intégrale ressemble tout à fait à quelque chose de déjà vu :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\beta u^2)e^{-iux}du=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4\beta}\right),$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{+\infty}\sin(au^2)\cos(ux)du=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\left(\cos\frac{x^2}{4a}-\sin\frac{x^2}{4a}\right)\;;$$

dérivons par rapport à $x$ :

$$\int_0^{+\infty}u\sin(au^2)\sin(ux)du=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\frac{2x}{4a}\left(\sin\frac{x^2}{4a}+\cos\frac{x^2}{4a}\right)=\frac{x}{8a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\left(\sin\frac{x^2}{4a}+\cos\frac{x^2}{4a}\right),$$

remplaçons a par $a(t-z)$ et réinjectons dans (**8**) :

$$\begin{aligned}y(x,t)&=\frac{2a}{\pi}\int_0^t f(z)\frac{x\sqrt{2\pi}}{8a\sqrt{a}(t-z)^{3/2}}\left(\sin\frac{x^2}{4a(t-z)}+\cos\frac{x^2}{4a(t-z)}\right)(t-z)dz\\&=\frac{x}{2\sqrt{2\pi a}}\int_0^t\frac{f(z)}{\sqrt{(t-z)}}\left(\sin\frac{x^2}{4a(t-z)}+\cos\frac{x^2}{4a(t-z)}\right)dz.\end{aligned}$$

## 4. Vibrations d'une poutre de longueur finie

### 4-a : **Equation et résolution**

Soit $L$ la longueur de la poutre, les conditions initiales sont $y(0, t) = y(L, t) = 0$ ainsi que $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L) = 0$ (la poutre repose librement à ses deux extrémités). L'équation (**3**) reste valable avec quelques modifications : les bornes de l'intégrale d'espace sont évidemment 0 et L et nous utilisons la TF sous sa forme finie, soit la série de Fourier de $y$ :

$$Y(n, t) = \int_0^L y(x, t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \; .$$

Les remarques précédentes restent valables et on a

$$\int_0^L \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_0^L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \; .$$

L'équation (**3**) devient donc

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{a^2 n^4 \pi^4}{L^4} Y = \frac{a^2}{EI}\int_0^L P(x, t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a^2}{EI}\hat{P}(n, t) \; .$$

Notons $Y_0$ et $Y_1$ les valeurs $Y(n, 0)$ et $\frac{dY}{dt}(n, 0)$, alors en suivant la même démarche que dans le paragraphe précédent :

(**9**) $$Y(n, t) = Y_0 \cos\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right) + \frac{L^2 Y_1}{an^2\pi^2}\sin\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right) + \frac{L^2 a}{EIn^2\pi^2}\int_0^t \hat{P}(n, z)\sin\left(\frac{an^2\pi^2 (t-z)}{L^2}\right)dz$$

et on termine en reprenant la TF inverse qui ici s'écrit

$$y(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} Y(n, t)\sin\frac{n\pi x}{L} \; .$$

### 4-b : **Vibrations libres**

Comme dans les deux cas précédents on a $P(x, t) = 0$ de même que pour $\hat{P}(n, t)$. On prend $y(x, 0) = f(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(x, 0) = g(x)$, d'où $Y_0 = \int_0^L f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du$ et $Y_1 = \int_0^L g(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du$.

On injecte tout ça dans (**9**), etc.

Prenons par exemple une poutre droite à $t = 0$ et frappons la violemment en un point d'abscisse $x_0$ ($0 < x_0 < L$), ce qui se traduit par

$$f(x)=0 \text{ et } g(x) = \frac{I}{\rho S}\delta(x - x_0)$$

($\delta$ est la fonction de Dirac dont on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u - x_0)f(u)du = f(x_0)$)

on a donc $\int_0^L \delta(u - x_0)g(u)du = g(x_0) \Leftrightarrow \int_0^L \delta(u - x_0)\sin\frac{n\pi u}{L}du = \sin\frac{n\pi x_0}{L}$ et

$$Y(n, t) = \frac{L^2}{an^2\pi^2}\sin\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right)\int_0^L g(u)\sin\left(\frac{n\pi u}{L}\right)du = \frac{L^2}{an^2\pi^2}\sin\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right)\frac{I}{\rho S}\sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)$$

et enfin

$$y(x, t) = \frac{2L}{a\pi^2}\frac{I}{\rho S}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

4-c : ***Vibrations forcées***

On applique une force variable $\phi(t)$ en un point $x_0$, de sorte que $P(x,t)=\phi(t)\delta(x-x_0)$ et $\hat{P}(n,t)=\phi(t)\int_0^L \delta(x-x_0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\phi(t)\sin\frac{n\pi x_0}{L}$ ; la même méthode que précédemment donne alors

$$y(x,t)=\frac{2La}{\pi^2 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\int_0^t \phi(z)\sin\left(\frac{an^2\pi^2(t-z)}{L^2}\right)dz\,.$$

De manière peut-être un peu plus réaliste la force appliquée se déplace le long de la poutre avec une vitesse constante $v$ : on a alors

$$P(x,t)=\begin{cases}\phi(t)\delta(x-vt),\ 0\le vt\le L\\ 0,\qquad vt>L\end{cases}\text{ d'où }\hat{P}(n,t)=\begin{cases}\phi(t)\sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right),\ 0\le vt\le L\\ 0,\qquad vt>L\end{cases}.$$

Le résultat est identique au cas précédent mais allons un peu plus loin en prenant une force constante $\phi(t)=P_0$ : on a

$$\int_0^t \phi(z)\sin\left(\frac{an^2\pi^2(t-z)}{L^2}\right)dz=\int_0^t \sin\left(\frac{n\pi vz}{L}\right)\sin\left(\frac{an^2\pi^2(t-z)}{L^2}\right)dz$$

$$=\frac{L^3 v}{n\pi\left(L^2v^2-n^2\pi^2a^2\right)}\sin\left(\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right)-\frac{L^2v^2a}{\left(L^2v^2-n^2\pi^2a^2\right)}\sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)$$

d'où on tire évidemment l'expression de $y$ (*que se passe-t-il lorsque* $v=\frac{n\pi a}{L}$ ¿…)


Sources :

*Internet*

http://www.enpc.fr/fr/formations/ecole_virt/cours/pecker/chapitre1.pdf

(remplacer le 1 de chapitre par 2, 3,…, 8, les poutres sont entre autres dans le ch. 3).

problème du flambage pour une poutre verticale : quelques sites internet en parlent mais pas toujours très clairs, voir quand même

http://www.ulb.ac.be/smc/cours/cnst338/15-instabilites.PDF

http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/Poutre/poutre.htm

*Livres*

P. Fleury, J.-P. Mathieu, *Physique générale et expérimentale*, Eyrolles, 1961.

F. Ayres Jr, *Théorie et applications des équations différentielles*, série Schaum, McGrawHill, 1986.

Ian N. Sneddon, *Fourier transforms*, Dover inc., 1995