La fonction exponentielle

L'objectif de ce travail est de découvrir la fonction exponentielle réelle à travers la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. La première partie doit vous permettre de maîtriser cette méthode avec le concours d'Excel, la deuxième permet de trouver la solution de l'équation différentielle, la troisième démontre certains résultats très importants quand à la quatrième on revient à la méthode d'Euler pour résoudre deux équations différentielles intéressantes.

I. La méthode d'Euler

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue (notée généralement y) et ses dérivées (y', y'', …).

On dira que l'équation est *linéaire* et du *premier ordre* si on peut l'écrire $y'+P(x)y=Q(x)$. L'équation est *sans second membre* si $Q(x) = 0$. Par la suite k, k', C désigneront des constantes, x la variable.

D'une manière générale si on a une équation différentielle (E) et que l'on nous donne une fonction f dont on demande si elle est solution, il suffit de calculer les dérivées nécessaires de f, de remplacer et de vérifier que f satisfait (E) (on arrive alors à une égalité du style 0=0).

1. On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle $y'=ky$ où k est un réel quelconque. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que $y(x+h)=(1+hk)y(x)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

2. On définit les suites (x_n) et (y_n) par $x_0=\alpha$, $y_0=\beta$, $x_{n+1}=x_n+h$ et $y_{n+1}=(1+hk)y_n+h\varepsilon(h)$. Donner l'expression de x_n en fonction de α, h et n. En considérant que $h\varepsilon(h)$ est négligeable donner une expression de y_n en fonction de β, h, k et n.

3. On prend $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

a. Construire une feuille de calcul permettant de calculer les valeurs successives de x_n et y_n. Tracer les représentations graphiques $C_n(x_n, y_n)$ obtenues dans les cas suivants avec un pas $h = 0{,}02$:

$$k = -2\ ;\ k = -0{,}5\ ;\ k = 0\ ;\ k = 0{,}5\ ;\ k = 1\ ;\ k = 2.$$

b. Toujours avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, justifier que quand $k > 0$ la fonction y est croissante, quand $k = 0$ la fonction y est constante et quand $k < 0$ la fonction y est décroissante.

c. En modifiant les valeurs de α et β dans la feuille de calcul déterminer les changements apportés par ces différentes valeurs aux courbes C_n.

II. Résolution de $y' = y$

On note $n!$ (ce qui se lit *factorielle* de n) le nombre $1.2.3\ldots(n-1).n$.

1. a. On se demande s'il existe une fonction polynôme satisfaisant à l'équation (1) $y'=y$ avec $y(0)=1$. Pour cela on pose $P(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}a_nx^n$. Calculez $P'(x)$ et déduisez-en qu'aucune fonction polynôme (autre que le polynôme nul) n'est solution.

b. On considère que dans $P(x)$ N devient très, très grand. Montrez alors que si P était solution on aurait $a_n=\dfrac{1}{n!}$. On admettra que la fonction (si, si, ça représente bien une fonction) définie par $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$ est solution de (1) (la fonction f ici définie a été trouvée par Newton aux débuts du calcul différentiel).

2. On revient à la méthode d'Euler : on considère les suites $x_0=0$, $y_0=1$, $x_{n+1}=x_n+h$, $y_{n+1}=(1+h)y_n$ et on pose pour une valeur x **fixée** $h=\dfrac{x}{n+1}$. On note alors $x_n=x_n(x)$ et $y_n=y_n(x)$.

Montrez alors que $x_n(x)=x\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$ et que $y_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\dfrac{x}{n-1}\right)\ldots\left(1+\dfrac{x}{2}\right)(1+x)$.

3. On s'intéresse au comportement de $x_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

a. En utilisant Excel calculez $x_{100}(1)$, $x_{1000}(1)$, $x_{10000}(1)$. Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de cette suite ?

b. Vérifiez que $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$ puis que $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$ puis que $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2}$. Déduisez-en une minoration de x_n puis la limite de x_n quand n tend vers l'infini (démonstration de Nicole Oresme au 15$^{\text{ème}}$ siècle).

4. On s'intéresse au comportement de $y_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

a. Montrez que lorsque x est positif ou nul, $y_n(x)\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=w_n(x)$ et que lorsque x est négatif ou nul, $y_n(x)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=w_n(x)$.

b. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_n(x)}{y_n(x)}=1$. On admettra que pour n suffisamment grand les suites $w_n(x)$ et $y_n(x)$ sont « équivalentes », c'est-à-dire qu'elles ont le même comportement.

5. Comportement de $w_n(x)$.

a. Démontrez par récurrence la propriété (**P**) : $(1+u)^n\geq 1+nu$ pour tout réel $u>-1$.

b. Sens de variation de w_n : montrez que $1+\frac{x}{n+1}=1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n(n+1)}$. Justifiez alors que si $n>x>-n$,

$$w_{n+1}(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left[1-\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

puis en utilisant (**P**) que pour un entier n suffisamment grand, $w_{n+1}(x)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n+x}\right)=w_n(x)$. Concluez.

c. On considère $z_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ toujours avec $n>x>-n$.

Tracez avec l'aide de votre tableur préféré les suites $w_n(x)$ et $z_n(x)$ pour $x=2$ puis pour $x=-0{,}5$. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur leur comportement ?

Les vraiment courageux peuvent s'attaquer aux questions d., e. et f.

d. Montrez que $\frac{1}{z_n(x)}=w_n(-x)$; déduisez-en que $z_n(x)$ est décroissante à partir d'un certain rang.

e. Montrez que $\frac{w_n(x)}{z_n(x)}=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\geq 1-\frac{x^2}{n}$; qu'en déduisez-vous pour $w_n(x)$ et $z_n(x)$?

f. Montrez que $0<z_n(x)-w_n(x)<\frac{x^2}{n}w_n(x)$. Quelle est la limite de $z_n(x)-w_n(x)$ quand n tend vers l'infini ? Concluez !

6. On conclut donc de tout ceci à l'existence d'une limite commune aux suites $w_n(x)$ et $z_n(x)$; cette limite est une fonction et est notée **exp**(x) (*exponentielle* de x) avec

$$\boxed{\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{\exp(-x)}}$$

Par définition des suites $y_n(x)$ et $z_n(x)$ on a exp(0) = 1.

On s'intéresse ici à la dérivée de exp (a priori exp doit être solution de $y' = y$, donc sa dérivée doit être elle-même, sinon tout ce qu'on a fait n'aura servi à rien) : on cherche donc la limite de $\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

a. Montrez que $y_n(x+h)=\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[1+\frac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right]^n=y_n(x)\left(1+\frac{h}{n+x}\right)^n$.

b. Montrez que lorsque n est suffisamment grand on a $\frac{h}{n+x}>-1$.

c. En utilisant la propriété (**P**) montrez que $y_n(x+h)\geq y_n(x)\left(1+\frac{nh}{n+x}\right)$ puis que

$$\frac{y_n(x+h)-y_n(x)}{h}\geq y_n(x)\frac{n}{n+x}.$$

Lorsque n tend vers l'infini quelle inégalité obtenez-vous ?

On remplace h par $-h$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\exp(x-h)-\exp(x)\geq -h\exp(x)\Leftrightarrow \exp(x)-\exp(x-h)\leq h\exp(x)$$

puis x par $x + h$:

$$\exp(x+h)-\exp(x)\leq h\exp(x+h)\Leftrightarrow (1-h)\exp(x+h)\leq \exp(x)$$

En prenant h petit, $1-h>0$ d'où $\exp(x+h)\leq\frac{1}{1-h}\exp(x)\Leftrightarrow \exp(x+h)-\exp(x)\leq\frac{h}{1-h}$. Il n'y a plus qu'à conclure.

7. Nous savons maintenant que l'équation $y' = y$ avec $y(0)=1$ a au moins une solution. Est-ce la seule ?

a. On suppose qu'il existe une solution g autre que exp. Posons $f(x)=g(x)\exp(x)$. Calculez $f'(x)$.

b. Montrez que g est alors telle que $g'(x)=0$. Que vaut $g(x)$?

c. En utilisant $f(0) = 1$, montrez que f n'est autre que exp.

III. Quelques propriétés de exp

Les questions précédentes montrent deux définitions différentes de exp(x) :

$$\exp(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{ et }\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

(La première définition n'a pas été justifiée proprement, ce sera l'objet d'un problème ultérieur).

1. Avec Excel tracez les deux suites représentant exp(1) pour n compris entre 0 et 200 ainsi qu'une droite horizontale représentant exp(1) (on l'obtient directement avec la fonction *exp* de Excel). Quelle définition vous semble la plus efficace en terme de temps de calcul ? Le nombre $\exp(1)\approx 2{,}7183...$ est noté simplement e.

2. **exp est toujours strictement positive**

a. On suppose qu'il existe un réel α tel que exp(α) = 0, calculez $\exp(\alpha)\exp(-\alpha)$; concluez.

b. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires montrez que exp(x) > 0 pour tout x réel.

c. Déduisez-en le sens de variation de exp.

3. **Dérivée de exp(u)**

En utilisant la dérivation des fonctions composées montrez que $(\exp(u))' = u'\exp(u)$.

4. **La limite de exp en +∞ est +∞**

En utilisant la propriété (P) montrez que $\exp(x) \geq \lim_{n\to\infty}(1+nx)$; déduisez-en la limite de exp en +∞. Déterminez également $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)$.

5. ***C*exp(*kx*) est la solution de *y*' = *ky***

a. Calculez la dérivée de $f(x) = C\exp(kx)$ et vérifiez que f est solution. Que vaut f si $y(0) = 1$?

b. Soit g une autre solution possible, on pose $g(x) = h(x)\exp(kx)$; montrez que g est constante. Concluez.

6. **exp(*a* + *b*) = exp(*a*)exp(*b*)**

Cette propriété fondamentale peut être montrée en utilisant les définitions à base de suites mais c'est un peu laborieux. On va utiliser le fait que exp(kx) est l'unique solution de $y' = ky$ avec $y(0) = 1$.

a. On montre d'abord que si exp(ax) est solution de $f' = af$ alors exp(a + b) = exp(a)exp(b) : soit g la fonction définie par $g(x) = \exp(a+x) - \exp(a)\exp(x)$.

Montrez que $g'(x) = ag(x)$, calculez $g(0)$. Concluez.

b. On montre maintenant que si une fonction f est telle que $f(a + b) = f(a)f(b)$ pour tous a, b réels alors $f(x) = \exp(kx)$.

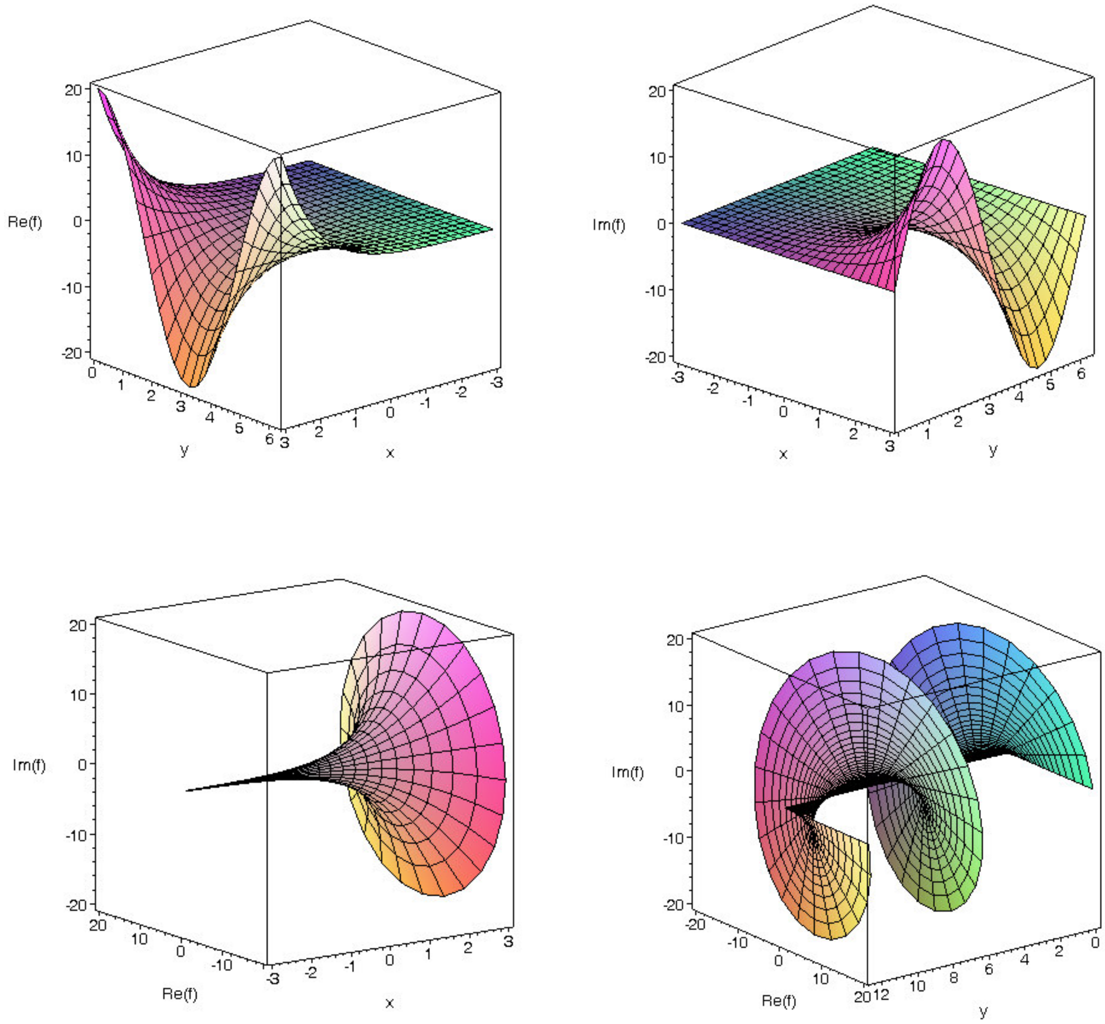
Dérivez la relation $f(a + x) = f(a)f(x)$ par rapport à x. Que se passe-t-il lorsque $x = 0$? Déduisez-en que f est solution de $y' = ky$ où $k = f'(0)$.

Pour quelques compléments :
http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers/EDexp03.pdf

La relation précédente n'est jamais que la propriété bien connue des puissances : $u^a.u^b = u^{a+b}$ avec a, b rationnels. La définition de la fonction exponentielle étend alors aux puissances réelles cette propriété ; comme on a par ailleurs exp(1) = e, on note en général $\boxed{\exp(x) = e^x}$ où les règles de calcul habituelles sur les puissances s'appliquent évidemment.

On peut se demander ce qui se passe si on étend la définition de x réel à x complexe dans $\exp(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ par exemple ; on définit alors une fonction appelée *exponentielle complexe* qui a les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle et on notera $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$. Dans le cas où la partie réelle de z est nulle on retrouve la notation exponentielle vue dans les complexes d'où

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Cette fonction est fondamentale dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique.



Voici quelques aperçus de l'exponentielle complexe… comme on ne peut la représenter qu'en 4 dimensions, il faut se faire une idée de sa structure à partir de projections dans l'espace 3D.

IV. Quelques résolutions avec utilisation de la méthode d'Euler

1. $y' = ky + k'$

On considère l'équation différentielle : (A) $y' = -10y + 6$ où y désigne une fonction de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. En utilisant la méthode d'Euler avec $y(0) = 0$ et un pas $h = 0{,}01$ tracer la courbe solution sur [0 ; 5].

b. Trouver K constante réelle telle que $f(t) = K$ soit solution de(A).

c. On pose $y = u + K$; montrer que y est solution de (A) si et seulement si u est solution de (B) : $y' = -10y$.

d. Déterminer les solutions de (B), en déduire les solutions de (A).

e. En utilisant la même méthode qu'au III. 4. b montrer que les solutions trouvées sont les seules possibles.

f. Déterminer la solution de (A) telle que $f(0) = 0$.

Tracez cette solution sur la même figure qu'à la question IV. 1. a. Représentez également l'écart entre la solution obtenue avec Euler et la solution exacte. Interprétez.

2. Etablissement d'un courant dans une bobine

Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à la date $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts). L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. A la date $t = 0$ l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$$\mathrm{L}i' + \mathrm{R}i = \mathrm{E} \text{ (ou } L\frac{di}{dt}+Ri=E\text{)}.$$

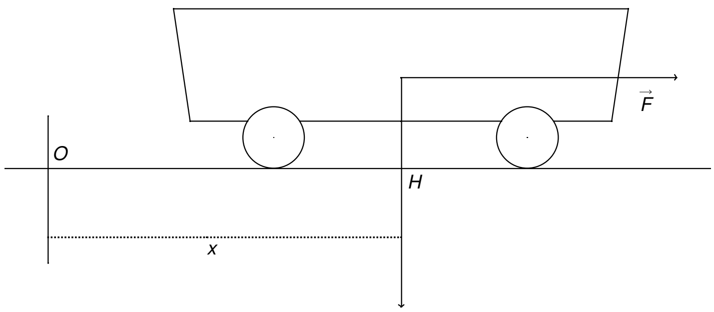
Valeurs numériques : dans toute la suite, on prend $R = 5$, $L = 0{,}5$ et $E = 3$.

1. Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t > 0$.

2. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)$. Donner une interprétation physique du résultat.

3. Au bout de combien de temps le courant atteint-il la valeur de 0,59 ampères (on cherchera la réponse avec Excel) ?

3. Sujet du bac 2004



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $\mathrm{N.m^{-1}.s^{-1}}$.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x'+200x''=50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,

x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v'=-\frac{1}{8}v+\frac{1}{4}$.

Résoudre l'équation différentielle (F) d'abord avec la méthode d'Euler puis complètement avec la même méthode qu'au IV. 1.

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t)=2t-16+16e^{-t/8}$.

3. Calculer $V = \lim_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.