Quelques calculs de Mécanique

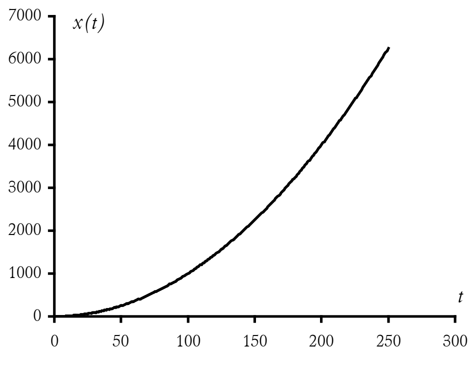
Galilée fut le premier à mathématiser la chute des corps en 1638 (*Discours sur deux nouvelles sciences*) : à la suite d'une analyse mathématique qu'il confirme expérimentalement, il arrive à montrer que la vitesse de chute augmente linéairement avec le temps ; il utilise une sorte de méthode par différences finies en considérant des positions x d'un objet lâché sans vitesse initiale obtenues à des intervalles de temps discrets et il établit la relation suivante :

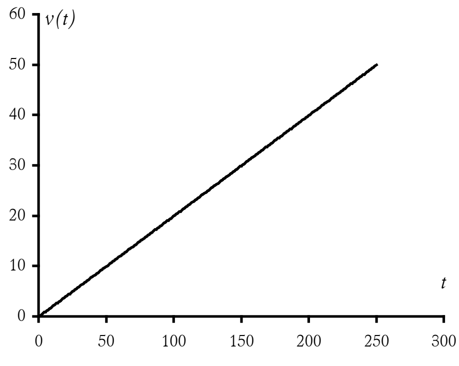
$$\frac{x((n+1)t)-x(nt)}{x(nt)-x((n-1)t)}=\frac{2n+1}{2n-1}.$$

L'unité de temps est mesurée expérimentalement par un volume d'eau constant s'écoulant d'un réservoir ; le membre de gauche est la raison (de *ratio* : rapport) de l'accroissement de la distance parcourue d'une unité de temps à l'autre, le nombre de droite est la raison, quotient de deux entiers impairs successifs. Ainsi, l'aspect continu du mouvement uniformément accéléré a été réduit à du discret grâce à la manipulation des proportions et à l'utilisation d'une unité de temps. On peut remarquer en termes plus modernes que Galilée manipule une suite récurrente de la forme :

$$(2n-1)u_{n+1}-4nu_n+(2n+1)u_{n-1}=0$$

ce qui donne très simplement les figures suivantes :





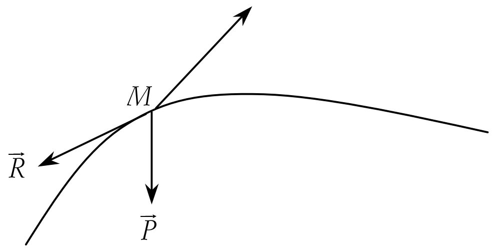
Chute des corps ; position, vitesse en fonction du temps

1. Lancer d'un projectile

1-a : Mise en équations

Le modèle évident est celui du canon : l'obus est tiré dans l'axe du canon, suivant un angle α avec l'horizontale. L'obus sort de la bouche du canon avec une vitesse initiale v_0.

A un moment donné, les forces agissant sur l'obus sont la résistance de l'air $\vec{R}$, proportionnelle au carré de la vitesse, dirigée à l'opposé de cette dernière (la vitesse est un vecteur représenté par la tangente à la trajectoire) et le poids $\vec{P}$ orienté vers le bas.



Nous regardons tout d'abord ce qui se passe lorsqu'on ne tient pas compte des frottements.

On a dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ les coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$ du centre de gravité M de l'obus, la vitesse $\vec{v}(x'(t)\,;\,y'(t))$ et l'accélération $\vec{a}(x''(t)\,;\,y''(t))$. Les conditions initiales sont

$$M_0 = O = (x(0)\,;\,y(0)) = \vec{0} \text{ et } \vec{v_0} = (x'(0)\,;\,y'(0)) = (v_0\cos\alpha\,;\,v_0\sin\alpha)\,.$$

Les équations du mouvement sont en suivant les lois de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases} \quad (\mathbf{1}).$$

1-b : Intégration par la méthode d'Euler

Cette méthode fait appel à la notion *d'approximation linéaire* d'une fonction en un point : si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$; en ne passant pas à la limite, mais en prenant h suffisamment petit, on peut écrire $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \Rightarrow f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

On dispose en général d'une relation du type $f'(x) = \varphi(x, f(x))$ (ce qu'on appelle une équation différentielle), ce qui permet lorsqu'on connaît x et $f(x)$ de calculer $f'(x)$.

Il s'agit alors de construire la courbe de la fonction inconnue f en utilisant ces relations : on part d'un premier point x_0, d'ordonnée connue $f(x_0)$, on en déduit le point $x_1 = x_0 + h$ d'ordonnée

$$f(x_1) = f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = f(x_0) + h\varphi(x_0, f(x_0))\,.$$

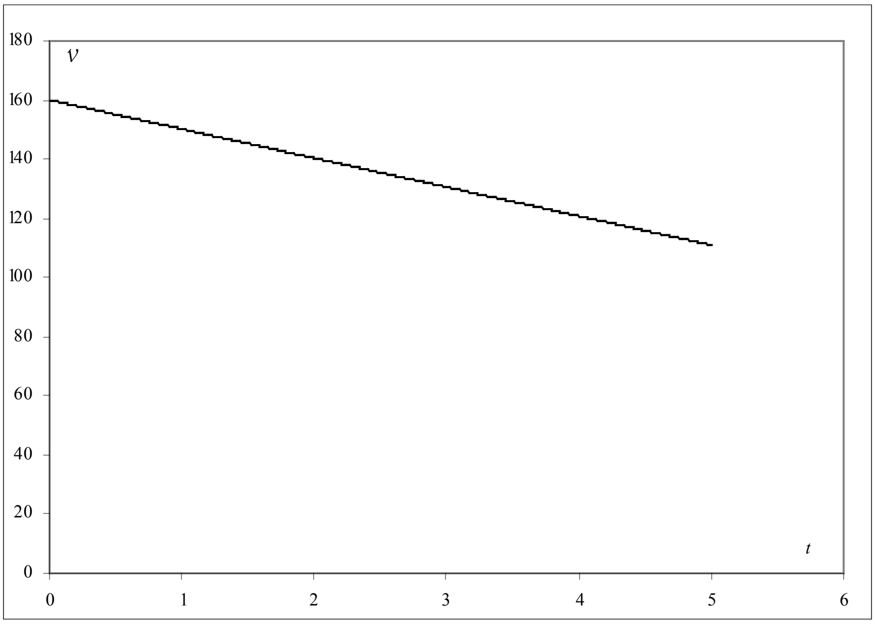
Il reste à recommencer de nombreuses fois pour se faire une idée de la courbe de la fonction f.

Evidemment tout ceci reste approximatif, mais dans de nombreuses situations il est impossible ou très difficile de faire mieux.

Revenons à notre problème : posons tout d'abord $\begin{cases} X(t) = x'(t) \\ Y(t) = y'(t) \end{cases}$, le système ($\mathbf{1}$) devient en remplaçant donc $X(t)$ par $\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$ (et pareil pour Y),

$$\begin{cases} X'(t) = 0 \\ Y'(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X(t+h)-X(t)}{h} = 0 \\ \dfrac{Y(t+h)-Y(t)}{h} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t+h) = X(t) \\ Y(t+h) = Y(t) - gh \end{cases}.$$

Nous allons représenter la courbe $(t, v(t))$ à l'aide d'Excel en prenant comme valeur de départ $\overrightarrow{v_0} = (X(0)\,;Y(0)) = (v_0 \cos\alpha\,; v_0 \sin\alpha)$.



chute_libre_1.xls

La vitesse en fonction du temps $v = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\alpha = 50°$, $v_0 = 160$ m.s^{-1}.

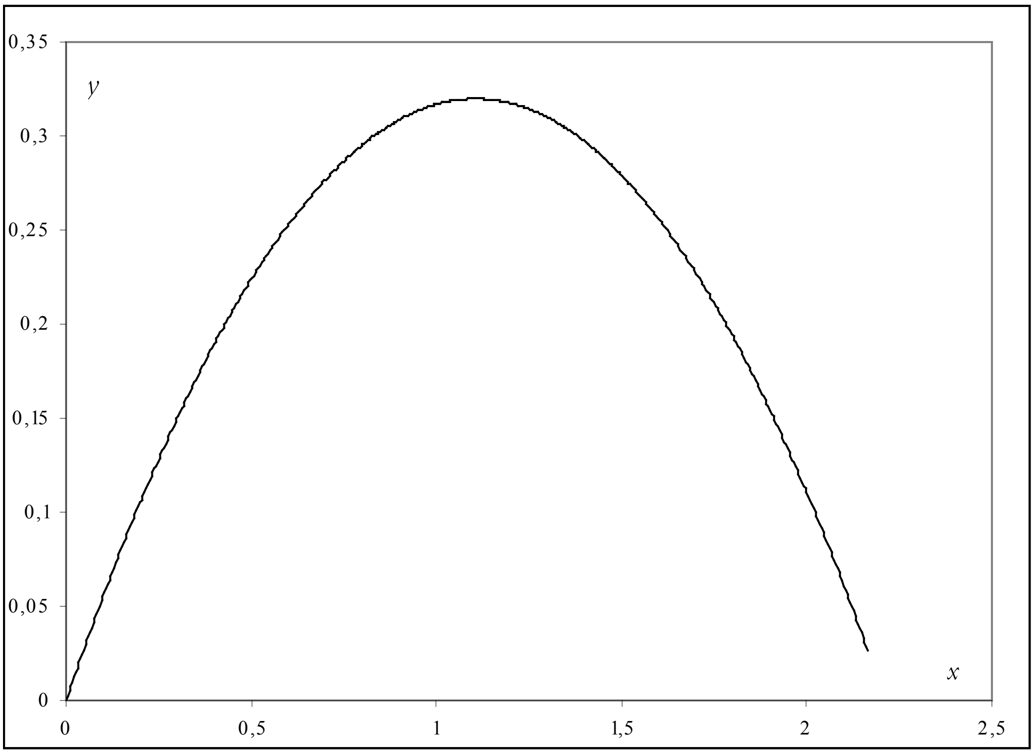
Maintenant nous disposons des solutions pour X et Y, soit pour x' et y'. Pour trouver les solutions pour x et y, il nous suffit de recommencer la même opération :

$$\begin{cases} x'(t+h) = x'(t) \\ y'(t+h) = y'(t) - gh \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(t+2h) - x(t+h)}{h} = \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ \dfrac{y(t+2h) - y(t+h)}{h} = \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} - gh \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t+2h) = 2x(t+h) - x(t) \\ y(t+2h) = 2y(t+h) - y(t) - gh^2 \end{cases}.$$

En fait comme on dispose déjà des valeurs de x' et y', il suffit d'écrire

$$\begin{cases} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t) \\ \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t+h) = x(t) + hx'(t) \\ y(t+h) = y(t) + hy'(t) \end{cases}$$

en prenant comme point de départ O.



chute_libre_2.xls

Courbe $(x(t)\,;y(t))$, $h = 0{,}001$, $\alpha = 30°$, $v_0 = 5$ m.s^{-1}.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	h		v0	5			v0cosa	4,33012702
2	0,001		alpha	30	0,52359878		v0sina	2,5
3			g	9,81			tana	0,57735027
4							solution approchée	
5								
6	t		X(t)	Y(t)	V		x(t)	y(t)
7	0			2,5	5		0	0
8	0,001		4,33012702	2,49019	4,99019		0,00433013	0,0025
9	0,002		4,33012702	2,48038	4,98038		0,00866025	0,00499019

t	X(t)	Y(t)	V	x(t)	y(t)
0	=H1	=H2	=RACINE(C7^2+D7^2)	0	0
=A7+$A$2	=C7	=D7-$D$3*$A$2	=RACINE(C8^2+D8^2)	=G7+$A$2*C7	=H7+$A$2*D7
=A8+$A$2	=C8	=D8-$D$3*$A$2	=RACINE(C9^2+D9^2)	=G8+$A$2*C8	=H8+$A$2*D8
=A9+$A$2	=C9	=D9-$D$3*$A$2	=RACINE(C10^2+D10^2)	=G9+$A$2*C9	=H9+$A$2*D9
=A10+$A$2	=C10	=D10-$D$3*$A$2	=RACINE(C11^2+D11^2)	=G10+$A$2*C10	=H10+$A$2*D10

1-c : Solutions exactes

On repart de $\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = K \\ y'(t) = -gt + K' \end{cases}$, or $\begin{cases} x'(0) = v_0 \cos\alpha \\ y'(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x'(t) = v_0 \cos\alpha \\ y'(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$.

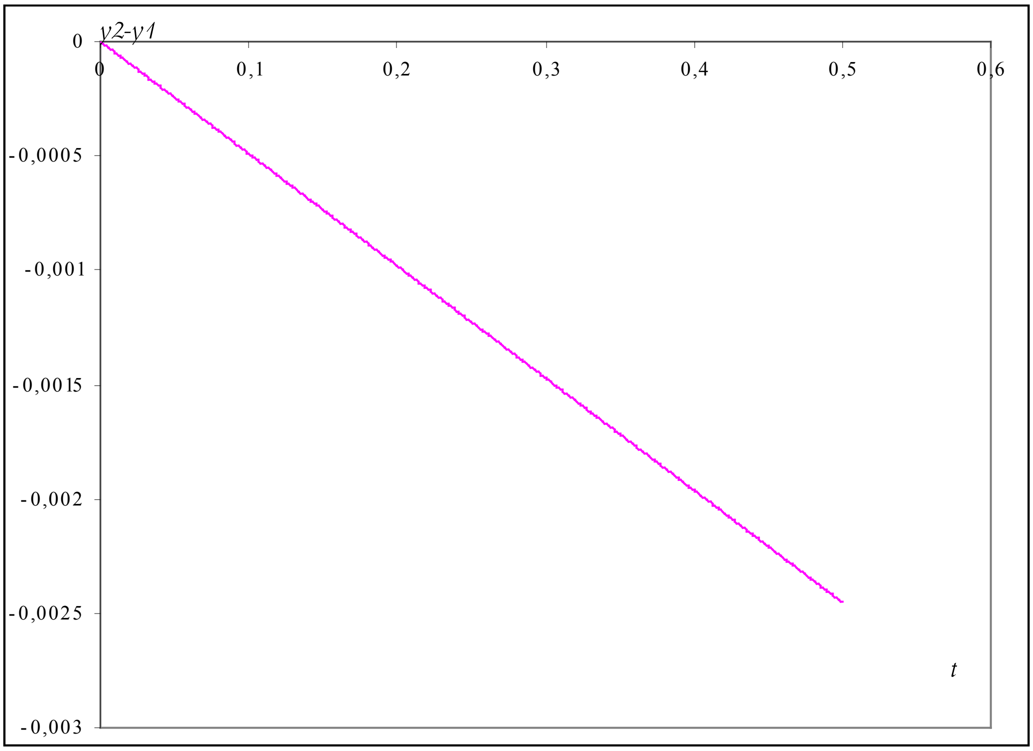
A partir de là on a de nouveau $\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha + k \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + k' \end{cases}$, mais comme $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, on a $\begin{cases} 0 = k \\ 0 = k' \end{cases}$ d'où

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}.$$

La trajectoire s'obtient en éliminant t entre les deux équations :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} x \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{g}{2 v_0^2}(1 + \tan^2\alpha) x^2 + x \tan\alpha.$$

On trouve donc l'équation d'une parabole. Comparons avec ce qui a été obtenu par Euler en faisant la différence des y :



chute_libre_3.xls

Différence entre les solutions exactes et solutions Euler (y) ; $h = 0{,}001$, $\alpha = 30°$, $v_0 = 5$ m.s^{-1}.

Les résultats sont globalement satisfaisants, dans ce cas la méthode d'Euler marche correctement. Attention, c'est loin d'être toujours le cas…

1-d : Quelques remarques

1. L'équation de la courbe solution, $y = F(x) = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$, montre que le point le plus haut atteint par l'obus est le maximum de cette fonction, atteint lorsque F' s'annule :

$$F'(x) = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)2x + \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = h(\alpha),$$

$$F(h(\alpha)) = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)\left[\frac{v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right]^2 + \frac{v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\tan\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

2. Si on souhaite atteindre un point situé à une distance d du canon, quel angle doit-on choisir ?

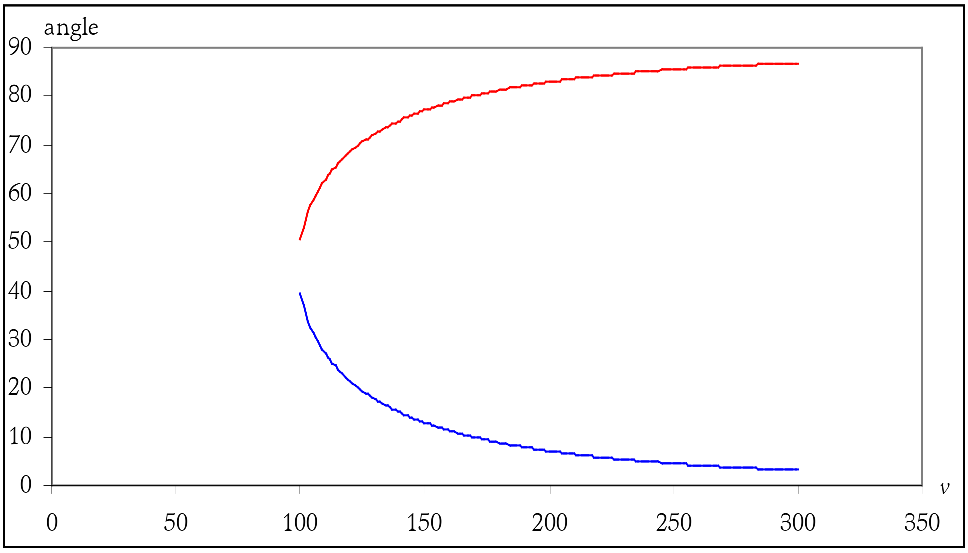
Supposons que le point à atteindre est à la même altitude que la gueule du canon… la fonction F s'annule évidemment en 0 ainsi qu'au point $-\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x + \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2 a}$; il faut donc résoudre l'équation $x = d \Leftrightarrow \frac{2v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2 a} = d \Leftrightarrow dg(1+\tan^2\alpha) - 2v_0^2\tan\alpha = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{dg}\tan\alpha + 1 = 0$.

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{d^2g^2} - 4 = 4\frac{v_0^4 - d^2g^2}{d^2g^2}$$

et

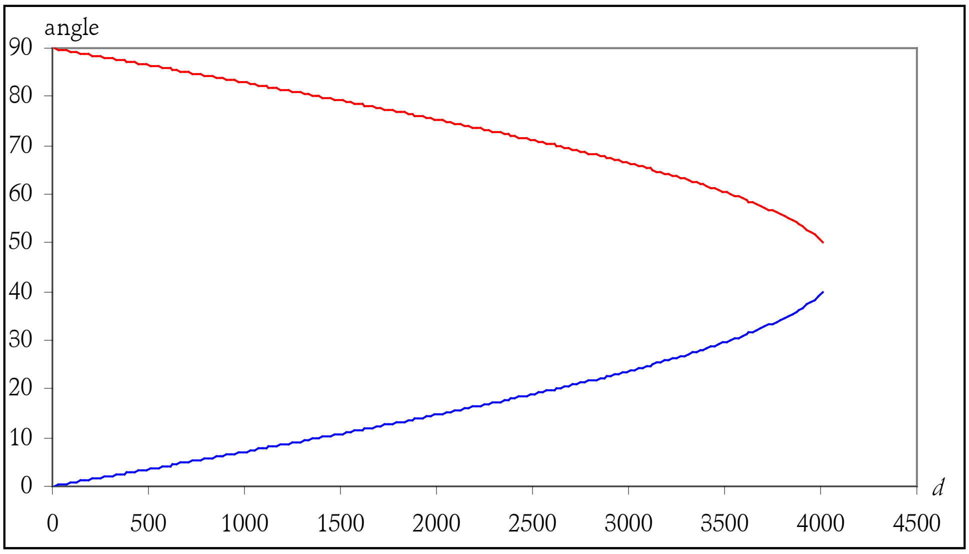
$$\tan\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2v_0^2}{dg} \pm 2\sqrt{\frac{v_0^4 - d^2g^2}{d^2g^2}}\right) = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - d^2g^2}}{dg} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - d^2g^2}}{dg}\right).$$

Par exemple on tire un projectile à 200 m.s^{-1} (1200 km.h^{-1}) pour atteindre une cible à 1 km de distance, on a deux choix : 7° ou 83 ° comme on le voit ci-dessous.



chute_libre_4.xls

En général on connaît la vitesse initiale du projectile, il est donc plus utile de construire le graphique (angle, distance) :



chute_libre_5.xls

3. Un paramètre décisif derrière tout cela est la distance parcourue par le projectile : un petit segment de la trajectoire a pour longueur ds de sorte que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|,$$

la distance totale entre t_0 et t_1 est alors $\int_{t_0}^{t_1} \left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| dt$, soit avec $\begin{cases} x'(t) = v_0 \cos\alpha \\ y'(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha + g^2t^2 - 2gt\sin\alpha}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(g^2t^2 - 2gt\sin\alpha + v_0^2\right)}\, dt.$$

facile à calculer avec Excel, nettement moins à la main… voir le fichier Maple : chute_libre_9.mws.

2. Chute libre verticale ralentie par l'air proportionnellement au carré de la vitesse

2-a : Mise en équations

Cette fois on lâche un objet d'une hauteur quelconque ; si on tient compte de la résistance de l'air on doit faire intervenir un facteur proportionnel au carré de la vitesse (ce résultat est expérimental) : l'équation du mouvement est alors

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a} = -k\left\|\vec{v}\right\|^2 \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|} + m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}\left\|\vec{v}\right\|\vec{v} + \vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t) = -\frac{k}{m} x'(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ y''(t) = -\frac{k}{m} y'(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} - g \end{cases}.$$

Le mouvement étant vertical la composante en x ne nous intéresse pas ; k est un paramètre dépendant du fluide concerné et de la géométrie de l'objet.

On a donc à résoudre

$$y''(t) = -g - \frac{k}{m}\left(y'(t)\right)^2 \Leftrightarrow Y'(t) = -g - \frac{k}{m}Y^2(t) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^2$$

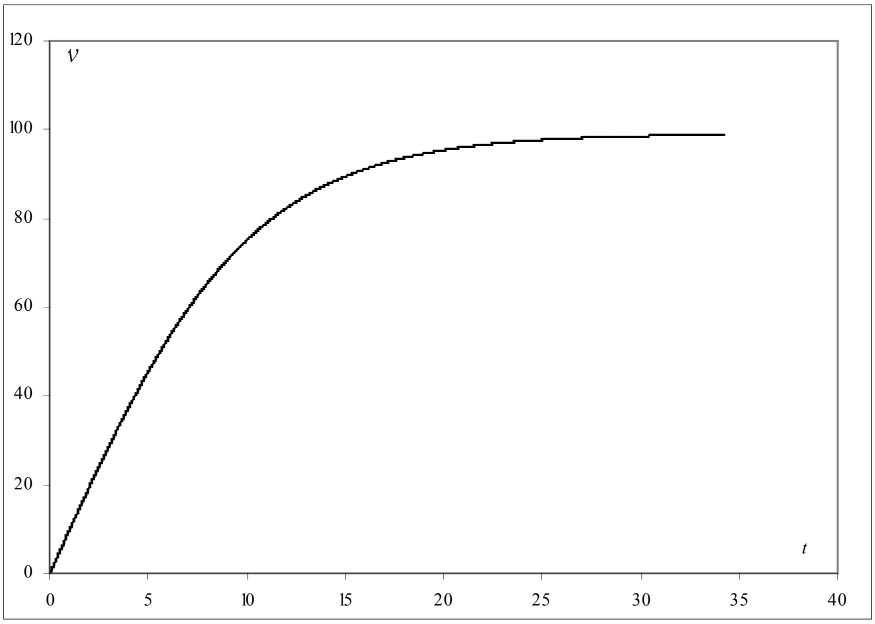
en posant successivement $y' = Y = v$.

2-b : Intégration par la méthode d'Euler

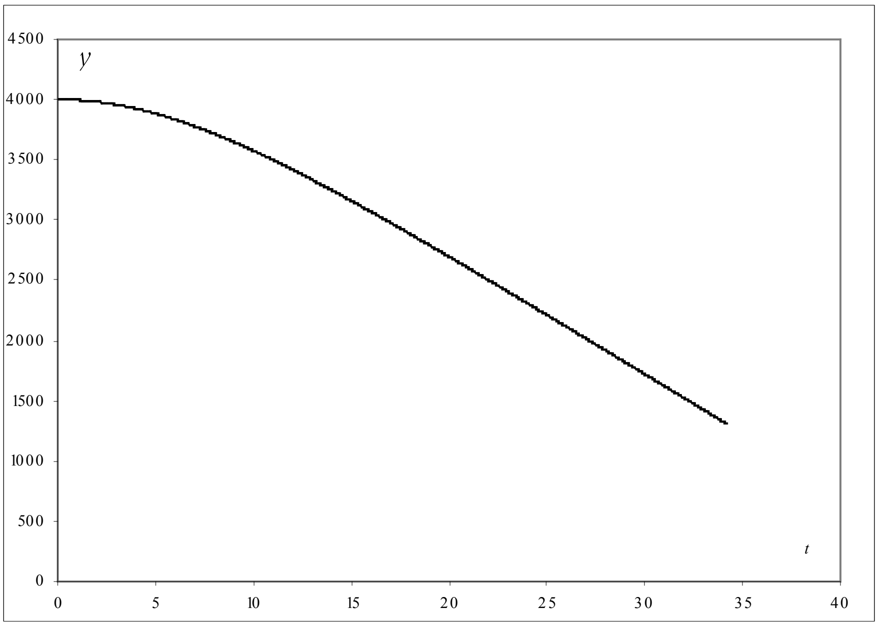
Le principe est toujours le même : pour avoir v on fait donc

$$v(t+h)=v(t)+h\left[-g-\frac{k}{m}v^2(t)\right]$$

puis pour avoir y, $y(t+h)=y(t)-hv(t)$ avec un petit changement de signe car on tombe alors que l'on utilise la valeur absolue de la vitesse.



chute_libre_6.xls



chute_libre_6.xls

$v_0=0$, $y_0=4000$ m, $h=0{,}02$, $m=1$, $k=0{,}001$

2-c : Solutions exactes

Cette équation n'est pas linéaire mais on peut l'intégrer en faisant les transformations suivantes :

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2=g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)$$

avec $K^2 = \frac{mg}{k} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

On a alors en séparant les variables $\frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)} = g\,dt$, soit en écrivant $\frac{1}{1-\frac{v^2}{K^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{v}{K}} + \frac{1}{1+\frac{v}{K}}\right)$:

$$\frac{dv}{1-\frac{v}{K}} + \frac{dv}{1+\frac{v}{K}} = 2g\,dt.$$

Il nous reste à intégrer : $-K\ln\left(1-\frac{v}{K}\right) + K\ln\left(1+\frac{v}{K}\right) = 2gt + C$.

Si à $t = 0$ on a $v = 0$, il vient $C = 0$, d'où

$$-K\ln\left(1-\frac{v}{K}\right) + K\ln\left(1+\frac{v}{K}\right) = 2gt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K+v}{K-v}\right) = \frac{2g}{K}t \Leftrightarrow \frac{K+v}{K-v} = \exp\left(\frac{2g}{K}t\right).$$

Lorsqu'on cherche v tel que $\frac{K+v}{K-v} = z \Leftrightarrow K+v = zK - zv \Leftrightarrow v(1+z) = K(z-1) \Leftrightarrow v = K\frac{z-1}{z+1}$, soit ici en remplaçant z par $\exp\left(\frac{2g}{K}t\right) = \exp(2\mu t)$:

$$v = K\frac{\exp(2\mu t)-1}{\exp(2\mu t)+1} = K\frac{\exp(\mu t)}{\exp(\mu t)}\frac{\exp(\mu t)-\exp(-\mu t)}{\exp(\mu t)+\exp(-\mu t)} = K\tanh(\mu t) = K\tanh\left(\frac{g}{K}t\right).$$

On peut se demander quelle est la signification physique de K ; écrivons les équations aux dimensions pour l'équation initiale : $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$: $[kg]\frac{[m]}{[s]^2} = [kg]\frac{[m]}{[s]^2} - \langle k\rangle\frac{[m]^2}{[s]^2}$ d'où $\frac{[kg]}{[m]} = \langle k\rangle$, k s'exprime donc en kg.m^{-1}. Pour K on a alors $\langle K\rangle = \left(\frac{[kg]\frac{[m]}{[s]^2}}{\frac{[kg]}{[m]}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{[m]^2}{[s]^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{[m]}{[s]}$, qui est donc une vitesse…

En fait lorsque t tend vers l'infini $\tanh\left(\frac{g}{K}t\right)$ tend vers 1 et v tend vers K qui est alors la vitesse limite de v.

Terminons en cherchant au bout de combien de temps on arrive à p % de cette vitesse limite :

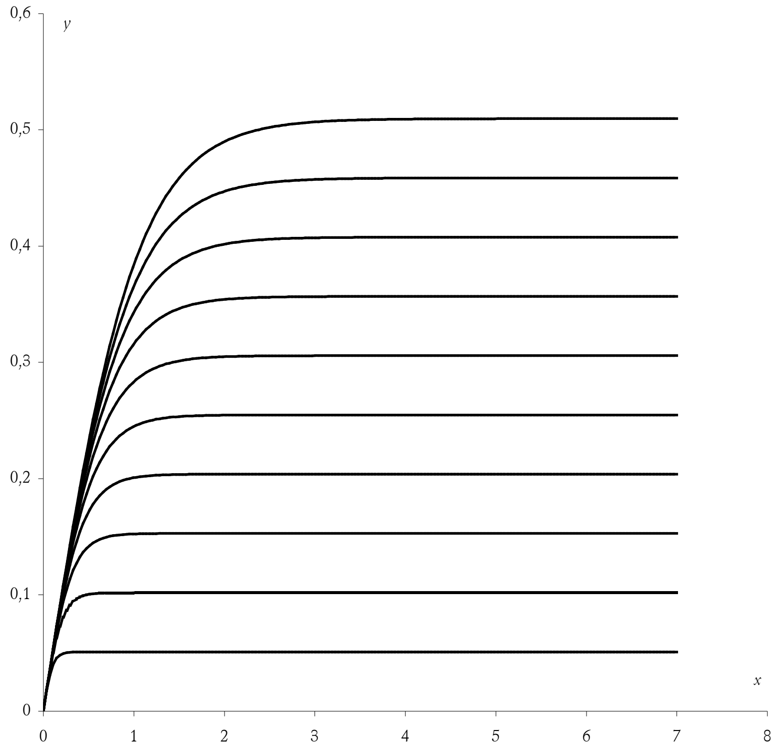
$$K\tanh\left(\frac{g}{K}t\right) = \frac{p}{100}K \Leftrightarrow \tanh\left(\frac{g}{K}t\right) = \frac{p}{100} \Leftrightarrow \frac{g}{K}t = \tanh^{-1}\left(\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow t = \frac{K}{g}\tanh^{-1}\left(\frac{p}{100}\right).$$

Expression de $\tanh^{-1}$: on cherche à résoudre

$$x = \tanh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow (1-x)e^y = (1+x)e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Finalement on a $t = \frac{K}{2g}\ln\left(\frac{100+p}{100-p}\right)$.



chute_libre_7.xls

Vitesses

3. Chute libre ralentie par l'air proportionnellement au carré de la vitesse avec direction initiale quelconque

On a donc de nouveau (**1**), mais sous sa forme complète cette fois :

$$m\vec{a}=\vec{R}+\vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a}=-k\left\|\vec{v}\right\|^2\frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}+m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a}=-\frac{k}{m}\left\|\vec{v}\right\|\vec{v}+\vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t)=-\dfrac{k}{m}x'(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} \\ y''(t)=-\dfrac{k}{m}y'(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}-g \end{cases}.$$

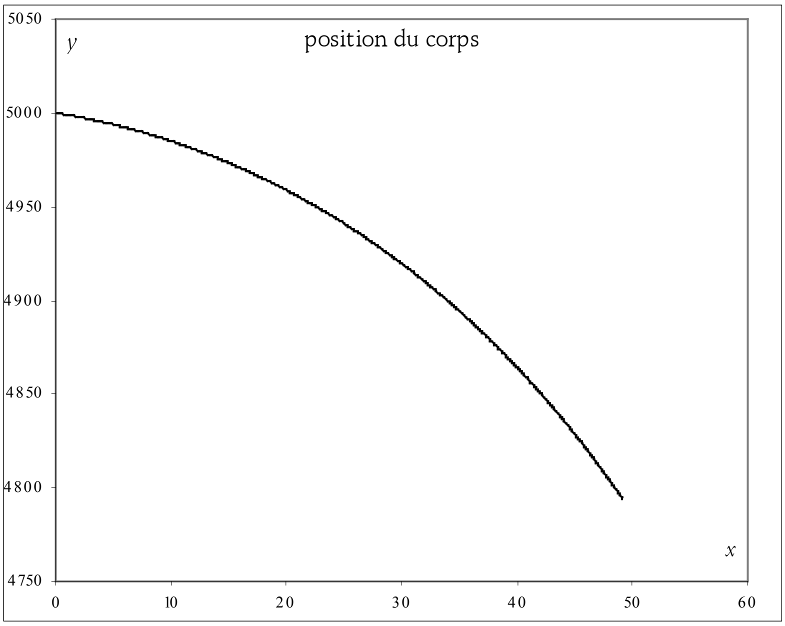
On pose $x'=X, y'=Y$, soit

$$\begin{cases} X'(t)=-\dfrac{k}{m}X(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2} \\ Y'(t)=-\dfrac{k}{m}Y(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2}+g \end{cases}$$

qui se « résoud » avec la méthode d'Euler ; le système précédent devient donc :

$$\begin{cases} \dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}=-\dfrac{k}{m}X(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2} \\ \dfrac{Y(t+h)-Y(t)}{h}=-\dfrac{k}{m}Y(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2}+g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(t+h)=X(t)-\dfrac{hk}{m}X(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2} \\ Y(t+h)=Y(t)-\dfrac{hk}{m}Y(t)\sqrt{X(t)^2+Y(t)^2}+g \end{cases}$$

On connaît la vitesse initiale $(X(0), Y(0))$ d'où on calcule successivement les coordonnées des points $(X(h), Y(h)), (X(2h), Y(2h)), \ldots$ On finit ici en revenant à x et y par une nouvelle application de la méthode d'Euler puisque X est la dérivée de x et Y celle de y.

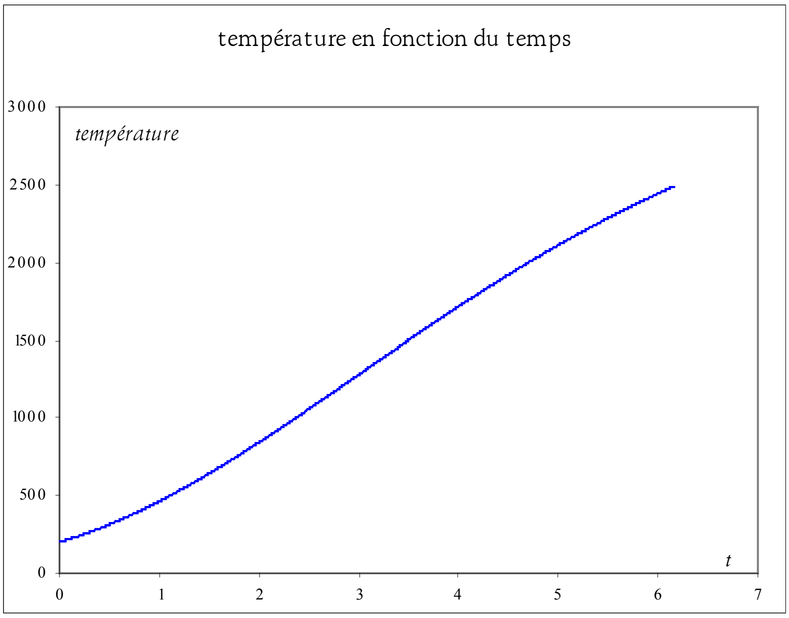


chute_libre_8.xls

Tableau Excel : chute_libre_8.xls

k	g	x0	0	(en m)		
0,001	-10	y0	5000	(en m)		
m	K	vx0	10	(en m/s)		
1	1	vy0	-10	(en m/s)		
(-k/m)						
-0,001		Chute d'un corps dans l'atmosphère à densité variable suivant l'altitude				
h						
0,01					température	densité
temps	vitesse x	vitesse y	x(t)	y(t)	$=Kv^2$	
t	vx	vy	x	y	temp	k
0	10	-10	0	5000	200	-0,002718282
0,01	9,99615569	-10,0961557	0,1	4999,9	201,855488	-0,002718336
0,02	9,992295	-10,1922564	0,19996156	4999,79904	203,728049	-0,002718391
0,03	9,98841786	-10,2883017	0,29988451	4999,69712	205,617642	-0,002718447
0,04	9,98452421	-10,3842911	0,39976869	4999,59423	207,524225	-0,002718502
Valeurs de *h* : formule =A*n*+\$A\$4	Valeurs de X	Valeurs de Y	Valeurs de x	Valeurs de y	Température proportionnelle au carré de la vitesse (énergie)	Coefficient de prop. lint altitude et densité de l'air

Ainsi qu'on peut le voir, on peut faire joujou avec le tableur, par exemple en calculant une température (approximative) due à l'énergie de frottement, proportionnelle également à v^2. Ceci donne par exemple le graphique suivant :



chute_libre_8.xls

Sans grande difficulté, on peut rajouter le paramètre pression qui varie en fonction de l'altitude, etc.